Übungen

Abgabetermin: Freitag 30.4. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46
THEMEN: Verteilungen, Bildmaße, Funktions-Erweiterungs-Argument, monotone Konvergenz, Lemma von Fatou

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Es sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{k} & \text{falls ein } k \in \mathbb{N} \text{ existiert mit } k-1 < \frac{1}{x} \leq k \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Überprüfen Sie, dass G eine Verteilungsfunktion ist und zeichnen Sie diese.

b) Bestimmen Sie das zugehörige Maß μ_G durch Angabe von $\mu_G(\{x\})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie die Pseudoinverse $G^- :]0,1[\to \mathbb{R}$ von G, definiert durch

$$G^-(u) := \inf\{z \in \mathbb{R} \mid G(z) \geq u\}.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)
μ sei eine Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ mit $f(x) = x^2$.

a) Geben Sie die minimale σ-Algebra $\mathfrak{A}$ an, unter der f $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_{[0,\infty)}$-messbar ist.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion des Bildmaßes μ^f.

Aufgabe 7 (6 Punkte)
$(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, $f : \Omega \to [0,\infty)$ μ-integrierbar und $\nu(A) := \int_A f d\mu, A \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

a) ν ist ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) ν ist μ-stetig, d.h. aus $\mu(N) = 0$ für ein $N \in \mathfrak{A}$ folgt $\nu(N) = 0$.

c) Für alle $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ν-integrierbar gilt $\int_A g d\nu = \int_A g \cdot f d\mu$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Geben Sie einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von μ-integrierbaren, nichtnegativen, reelwertigen Funktionen an, für die im Lemma von Fatou strikte Ungleichheit gilt, genauer:

a) $\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

b) $\int \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = 0 < \infty = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu$.